TITLE:
有限Chevalley群の既約表現,既約指標について (ユニタリ表現論とその応用)

AUTHOR(S):
川中, 宣明

CITATION:
川中, 宣明. 有限Chevalley群の既約表現,既約指標について (ユニタリ表現論とその応用). 数理解析研究所講究録 1973, 182: 102-118

ISSUE DATE:
1973-08

URL:
http://hdl.handle.net/2433/107158

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
182巻 1973年 102-118

有限 Chevalley 群の既約表現，既約指標について

阪大 理　川中宣明

§1. 問題とその歴史

finite Chevalley groups という言葉は、最も狭い意味では Chevalley が彼の有名な Tôhoku paper [1] において統一的に構成した有限群の族そのものを指す。これは、(有限体に係数をもつような)複素単純リー群の analogue で代数群の言葉で言うと、有限体 k 上定義され k 上 split する極大トーラスを持つ単純線型代数群 G の k-有理点のなす群 G_k である(厳密に言うと Chevalley の作ったのは、その中の adjoint type と呼ばれるもの。)。最も広い意味にとると Steinberg の G_σ のことである。ここに G は標数 $p>0$ の代数的閉体 K 上で定義された連結半単純線型代数群で σ は G の上への endomorphism で $G_\sigma=\{x\in G \mid x^\sigma=x\}$ が有限となるもの、である。広い意味の族は、代数群の有理点のなす群以外に、いわゆる鈴木の群，Ree の群を含んでいる。この文では、簡単のために、

狭い意味の Chevalley 群だけを扱うことにするが、この制限は多くの場合、不要である。

以下、(既約)表現と言えば、複素数体上での表現を、指標と言えば、複素数体上の表現の指標を意味する。有限 Chevalley 群の既約指標を求める問題は、1898年に Frobenius が、PSL_2 の場合を解決して以来の問題であるわけだが、それから今世紀中頃までの長い間、たいした進展もなかったので、1951年に Steinberg が、GL_2, GL_3, GL_4 の既約指標を、すべて求め、一般の GL_n の表現と対称群 $\mathfrak{S}_n$ (GL_n の Weyl 群)の表現との重要な関係を証明したこと[2]，さらに1955年に Green [3] が、(まるで魔法のような方法で、) GL_n の既約指標の理論を一気に作りあげてしまったこと，あたりを、この問題の研究史の事実上の始まりと考えて良いと思う。その後の研究の中で興味あるものとしては、表現の分類に関する I.M. Gelfand - M.I. Graev，および Harish-Chandra の仕事、上記の Steinberg の論文の系統と見られる N. Iwahori [4]，C.W. Curtis - N. Iwahori - R. Kilmoyer [5]，いわゆる Steinberg representation についての Steinberg，Curtis，Solomon [6] [7] [8] 等の論文などが、挙げられるが，まだ Green の結果を越えるものは得られていない。一方，既約表現の構成については SL_2 の時だけが、完

全に解けているだけで、上記の[5],[8]等に特殊な表現が作られているに過ぎない．なお、これら主要問題に関連して，Chevalley群の共役類の理論を作る問題，Weyl群（一般に，finite reflection group）の共役類，既約表現，既約指標の理論を作ることが，重要な未解決問題として残されている．これらの問題は決して有限群論の内部的問題でなく，もし決定的な結果が得られたならば、リー群のユニタリ表現論を始め他の数学部門に大きな影響を与えるものと思う．それだけに方法的にもできるだけ広い視野に立つことが必要である．

§2. Cusp forms (Harish-Chandra) と Analytic series (Gel-fand-Graev)

Harish-Chandra は、彼が real semisimple Lie group の表現論に関連して導入した群上の cusp forms の概念を finite case に拡張した[9]．これによって、例えば discrete series という「コトバ」を定義することができるが、多分に formal な整理的概念の感がある．（どの parabolic k-subgroup にも入らないようなカルタン部分群/k が A_n型以外の時には，(共役を除いて) 2個以上あるということも real の時に比べてうまくいかないことの一つの原因である．）

kを有限体，Gをk上定義された半単純線型代数群で，

k 上 split する maximal torus を持つものとする。G の連結な solvable subgroup で極大なものを Borel subgroup と言う。Borel subgroup を含むような G の subgroup を parabolic subgroup と言う。G は k 上定義された Borel subgroup B を持つ。parabolic subgroup P は ${}^{\exists}$reductive subgroup M と P の unipotent radical U の半直積：$P=M\cdot U$ に分解する（Levi 分解）。とくに P が k 上定義されていれば M も k 上定義されているようにとれる。（U は必らず k 上定義されている。）G の k-rational point からなる有限群 G_k 上の複素数値関数の全体を $C(G)$ とする。

<u>Definition 1.</u> $f \in C(G)$ が cusp form であるとは、任意の parabolic subgroup P/k に対して

$$f_P(x)\left(=\sum_{u\in U_k} f(xu)\right)=0 \quad \text{なること.}$$

ここに U は、P の unipotent radical. cusp forms の全体を ${}^{\circ}C(G)$ と書く。（G は任意の reductive k-group としてよい。）

${}^{\circ}C(G)$ は G_k による右(左)-translation に関し不変である。

<u>Definition 2.</u> G_k の ${}^{\circ}C(G)$ 上での左 translation による表現の既約成分を、G_k の discrete series の表現という。

これらのコトバを使うと、有限 Chevalley 群のすべての既約表現を求める問題は、次の二段階に分かれる(そして、このようにしてすべての既約表現が尽くされる。)ことがわかる:

I. discrete series の表現を構成すること。

II. 任意の parabolic k-subgroup P に対し、$P = M \cdot U$ をその Levi 分解$/k$ とする。M_k の discrete series の表現を U 上 trivial に拡張することによって P_k の既約表現が得られる。それを G_k に induce することにより得られる G_k の(既約 or 可約な)表現の既約成分をすべて求めること。

段階 II において P_k から G_k に induce して得られる表現の既約性の判定は、簡単である。それは、既約というコトバが、今の場合 topological な意味を含まず、純代数的な概念であることによる。問題は可約な場合であるが最終的結果はキレイになる筈である。(次の節で特殊な場合、$P = B$ の時、の研究を紹介する。) 段階 I は非常に難しい問題であるが、今までにわかっている例 (GL_n, Sp_4 の指標の表) から、real semi-simple の時と同様に、minisotropic tori (= どの parabolic k-subgroup にも含まれないような Cartan k-subgroups) の regular characters により parametrize された discrete series の族が存在することが予想されている。既に述べた

理由により(A_n型以外では)このような discrete series の系列が、いくつもあるということになる。

Harish-Chandra より先に Gelfand-Graev [10] は、やはり有限 Chevalley 群の既約表現の分類を目標として analytic series の表現という概念を提案した。これは、結果的には discrete series の表現と大体同じものであるが、少し面白い所もあるので簡単に触れておく。

B を G の Borel k-subgroup とすると B は k 上 split する G の maximal torus T を含み、B の unipotent radical を U とすると $B = T \cdot U$ (: B の Levi 分解)。G の T に関する root system を Φ, B によって決まる positive roots の全体を Φ_+ とすると $U_k = \prod_{a>0} X_a$, ここに X_a は $a \in \Phi_+$ に対応する root subgroup $\{x_a(t) \mid t \in k\}$。Φ の simple roots の全体を Δ, δ を Δ の任意 subset とする時, U_k の linear character ψ_δ を

$$\psi_\delta(x_a(t)) = \begin{cases} \alpha(t) \quad (t \in k) & \text{if } a \in \delta \\ 1 & \text{if } a \notin \delta \end{cases}$$

(α は k の nontrivial character)

によって定義する。これを G_k に induce して G_k の表現 $\Psi_\delta = \operatorname{ind}_{U_k \uparrow G_k} \psi_\delta$ を作る。Gelfand-Graev は G_k のふたつの既約表現が、どの Ψ_δ ($\delta \subset \Delta$) にも同じ multiplicity で含まれる時に、それらが同じ系列に属すと定義することを提案した。

とくに、Φ_Δにのみ含まれΦ_δ ($\delta \subsetneq \Delta$) には含まれない表現の全体を analytic series の表現と呼んだのである. A_n型の群ならすべての既約表現はどれかのΦ_δに含まれている, ところが、一般の Chevalley群では、このことは成立しないことが、後にわかった. このため、Gelfand-Graev の考え方は、cusp form の如き formal な理論を作るには適さない. しかし、次のような面白い結果がある.

<u>Theorem 1.</u> Φ_Δ は multiplicity free である. 即ち, Φ_Δ の既約成分はすべて multiplicity 1 で Φ_Δ に含まれている. (同様のことが $\mathfrak{p}$-adic case にも成立することを、最近、Gelfand 等が注意した.)

§3. Hecke algebras (N. Iwahori. 他) と Steinberg representation (R. Steinberg. 他)

B を G の Borel k-subgroup, $B = T \cdot U$ をその Levi k-decomposition とする. T_k の character θ を U_k 上 trivial になるように拡張して得られる B_k の linear character も θ と書くことにする. G_k の character $\chi_\theta = \operatorname{ind}_{B_k \uparrow G_k} \theta$ について、次のことが成立する.

<u>Theorem 2.</u> $W = N_{G_k}(T)/T_k$ ($= G$ の Weyl group) とおく.

(1) χ_θ が irreducible $\Leftrightarrow$ $\theta \neq \theta^w$ for all $w \in W$,

ここに θ^w は $\theta^w(t) = \theta(wtw^{-1})$ ($t \in T_k$) により定義する.

(2) θ_1, θ_2 を T_k のふたつの characters とすると，
χ_{θ_1} と χ_{θ_2} とが同値 $\iff \exists w \in W$ s.t. $\theta_1 = \theta_2^{w}$.
（証明は、例えば [11] に書いてある。）

そこで reducible な場合を、次に調べることになる。とくに $\chi_{\mathbb{1}} = \operatorname{ind}_{B_k \uparrow G_k} \mathbb{1}$ の場合が、詳しく研究されている。この目的のために N. Iwahori [4] は、Hecke algebra $H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k)$ を導入した。これは G 上の複素数値関数のうち B_k による左右からの translation で invariant なもの全体に convolution $*$:

$$(f_1 * f_2)(g) = |B|^{-1} \sum_{x \in G_k} f_1(gx^{-1}) f_2(x)$$

による積を入れた $\mathbb{C}$ 上の algebra である。よく知られているように，$H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k)$ は，表現 $\chi_{\mathbb{1}}$ の intertwining algebra :

$$\{ \sigma \in \operatorname{End} V \mid \sigma \cdot \chi_1(g) = \chi_1(g) \cdot \sigma \ (\forall g \in G) \}$$

（V は $\chi_{\mathbb{1}}$ の表現空間）

と同型である。[2] において Steinberg が（$G = GL_n$ のときに）初めて気づいた G_k の表現と Weyl group W の表現との関係を Iwahori は、次のように一般的に定式化した。

<u>Theorem 3.</u>(Tits) $H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k) \cong \mathbb{C}[W]$ (= the group algebra of W)

<u>Corollary.</u> Weyl group W の正則表現の既約分解が、

$$m_1 \rho_1 + m_2 \rho_2 + \cdots + m_r \rho_r \quad (m_i \text{は重複度})$$

の形をしているなら、$\chi_{\mathbb{1}}$ の既約分解も、同じ

形：　　$\chi_{\mathbb{1}} = m_1\psi_1 + m_2\psi_2 + \cdots + m_r\psi_r$

をしている。

さて、$w\in W$ に対して double coset BwB の characteristic function を $S(w)$ と書くことにする。これは当然、$H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k)$ の元である。$\{w_i \mid i=1,2,\cdots,l\}$ を W の simple reflections の全体とし、$1=S(1)$，$S_i = S(w_i)$ $(i=1,2,\cdots,l)$ とおくと $\{1, S_1, S_2, \cdots, S_l\}$ は $H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k)$ を生成する。W における基本関係：

$$w_i^2 = 1 \qquad (i=1,2,\cdots,l)$$

$$(1) \qquad \underbrace{w_iw_jw_iw_j\cdots\cdots}_{m_{ij}\text{個}} = \underbrace{w_jw_iw_jw_i\cdots\cdots}_{m_{ij}\text{個}},$$

但し m_{ij} はある整数 >0 $(i,j=1,2,\cdots,l\,;\ i\neq j)$，

に対応して $H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k)$ における積の基本関係式は，

$$S_i^2 = q\cdot 1 + (q-1)S_i \qquad (i=1,2,\cdots,l) \quad (q=|k|)$$

$$(2) \qquad \underbrace{S_iS_jS_iS_j\cdots\cdots}_{m_{ij}\text{個}} = \underbrace{S_jS_iS_jS_i\cdots\cdots}_{m_{ij}\text{個}}$$

となる。((2)において $q=1$ とすると(1)の形になる。即ち，$H_{\mathbb{C}}(G,B)$ は $\mathbb{C}[W]$ の deformation である。この deformation が trivial であることが，Theorem 3 の内容である。) $w\in W$ の $\{w_i\}$ の積による分解 $w = w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_r}$ のうち r が最小な

なるものを reduced decomposition と言い r を w の長さ $l(w)$ と言う。(2) より $w = w_{i_1} w_{i_2} \cdots w_{i_r}$ が reduced なら、$\mathcal{S}(w) = \mathcal{S}_{i_1} \mathcal{S}_{i_2} \cdots \mathcal{S}_{i_r}$ であることがわかる。

Theorem 3 によって $\mathbb{W}$ の既約表現と $\chi_{\mathbb{1}}$ の分解に表れるような G_k の既約表現とは一対一に対応する。とくに $\mathbb{W}$ の linear character : $w \to (-1)^{l(w)}$ に対応するのが以前から知られている Steinberg 表現である。(ほとんど同じ方法で、$\mathfrak{p}$-adic Chevalley group の Steinberg 表現が構成される。それは、SL_2 の時は Gelfand 等が special representation と呼んだものである。) Steinberg 表現(又は指標)の作り方はこの他にも種々あるが([6], [7], [8])、その指標は非常に面白い関数である:

Theorem 4. ζ を Steinberg repr. の character とすると、

([12])

$$\zeta(1) = q^N \quad (N = \text{positive root of } G \text{ の個数})$$

$$\zeta(u) = 0 \quad (u \neq 1 \text{ が unipotent} \in G_k \text{ の時})$$

一般に、t が G_k の semisimple element なら

$$\zeta(t) = \pm Q(t) \quad (\text{(注)符号は [13] で決められている.})$$

また、$g \in G_k$ が semisimple でなければ

$$\zeta(g) = 0,$$

但し、$Q(t)$ は t の centralizer $Z_G(t)_k$ の maximal unipotent subgroup の order.

一方[5]の一般論からζの値は次のようにも与えられている．（Theorem 4との関係は，clearでない．）

<u>Theorem 5.</u> ζをSteinberg characterとすると，

$$\zeta(g) = \sum_{w \in W} (-1)^{l(w)} q^{l(w)} \frac{|B_k w B_k \cap C(g^{-1})|}{|C(g^{-1})|},$$

但し，$C(g^{-1}) = G_k$におけるg^{-1}の共役類．

§4. unipotent elementsとcharacters（Green，他）

(real) semisimple Lie groupの表現のcharacterは，regularなsemisimple elementにおける値さえわかれば決定する．それ以外の元全体をあわせてもmeasureが0だからである．有限Chevalley群の場合には事態は全く異なる．とくに，semisimpleでないelementにおける値がすべて入用になる．ところが，semisimpleなconjugate classes（それは固有値により分類できる）に比べてsemisimpleでないconjugate classes（その分類には例えばJordan標準形の理論＝単因子論，を必要とする）の理論は，はるかに複雑である．さらに，群上の積分をtorus上の積分に変換するいわゆるWeylの積分公式も使えなくなるから，指標の直交関係等も，非常に複雑になってしまう．これらの困難は基本的なものであって，ここを切り抜けられるかどうかが，有限Chevalley群の表現論

を作る上での一つの重要な分岐点であると思う。Green の論文[3]は $G=GL_n$ の場合に、この難所を回避する非常に面白い方法を与えた。その内容は複雑過ぎて、ここに要約することは難しいが、大略以下の通りである。$G=GL_n$ の k 上定義された maximal torus の G_k-conjugacy classes の代表系を $\{T_i \mid i=1,2,\cdots,m\}$ とし、$W_i=N_{G_k}(T_i)/T_{i_k}$ とおく。T_{i_k} 上の W_i-不変な関数の全体を I_i とし $I=\bigoplus_{i=1}^{m} I_i$ とおく。また G_k 上の class functions 全体を $K(G_k)$ と書く。Green は $K(G_k)$ から I の上へのうまい linear isometric map $: K(G_k)\ni f \longrightarrow (f_i)_{i=1,2,\cdots m}\in I=\bigoplus_{i=1}^{m} I_i$ を構成したのである。但し、$K(G_k)$ 及び I における内積は、次のように定義する。

$$(f,h)_{K(G_k)}=|G_k|^{-1}\sum_{g\in G_k} f(g)\,\overline{h(g)} ,$$

$$(\Phi,\Psi)_I=\sum_{i=1}^{m}|W_i|^{-1}|T_{i_k}|^{-1}\Big\{\sum_{t\in T_{i_k}}\phi_i(t)\,\overline{\psi_i(t)}\Big\}$$

$$(\Phi=(\phi_i),\ \Psi=(\psi_i)\in I).$$

これが、ちょうど Weyl の積分公式の役割を果たす。即ち G_k 上の積分を torus 上の積分に変換することができる。これが Green の考えた方法である。T. A. Springer [14] は、有限体上の半単純リー環の上の Fourier 解析を用いて、Green の方法を一般の G に拡張できるのではないかと考えている。それは、Kirillov 等の言う orbit 上の積分による character の表示と

似ていて面白いが、まだ具体的な結果は出ていない。「Greenの積分公式」はとくに次の定理の $G=GL_n$ の場合を含んでいる。(G_k の unipotent elements 全体の上で1, その外で0となる G_k 上の関数を G_k 上で積分すればよい。)

<u>Theorem 6</u> (Steinberg [12]) G を connected reductive な有限体 k ($|k|=q$) 上定義された線型代数群とする。G_k の unipotent elements の個数と G の k 上 define された maximal tori の個数は共に q^{2N} ($N=|\{\text{positive roots of } G\}|$)。
(証明には Steinberg character の値 (Th.4) を用いる。)

川中 (Osaka J. M. vol.10 (1973)) はこの一般的に証明された定理を用いて、Green の公式の一般化を試みたが、結局 $G=GL_n$ の時のみに完全な積分公式に致達できただけであった。そこで上の定理をより詳しく理解するために、G_k の Bruhat 分解と G_k の unipotent elements との関係を考えることにする。この時、§3で解説した Hecke algebra $H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k)$ が次のような involutive automorphism ∧ を持つことが重要となる: ([4])

$$\hat{S}_i = (q-1)\cdot 1 - S_i = -q\cdot S_i^{-1}$$

$$\left(\text{従って } \hat{S}(w) = (-1)^{l(w)} q^{l(w)} S(w^{-1})^{-1}\right).$$

($q\to 1$ とすると $\mathbb{C}[W]$ の involutive automorphism ∧:
$\hat{w} = (-1)^{l(w)} w$ が得られる。)

$\{S(w) \mid w \in \overline{W}\}$ は、$H_{\mathbb{C}}(G_k, B_k)$ の vector space としての base であるから ある数 $a(w'; w)(q)$ があって

$$\hat{S}(w) = \sum_{w' \in \overline{W}} a(w'; w)(q) S(w')$$

<u>Theorem 7.</u> $a(1, w)(q) = F_w(q)$. 但し、$F_w(q)$ は以下に定義する $l(w)$ 次の polynomial in q.

<u>Definition</u> $\overline{W} \ni w$ の reduced decomposition ([4] をみよ) $w = s_1 s_2 \cdots s_m$ を fix し (s_i は simple reflections), I_w を次の条件 (1)〜(3) を満たす数列 $\underline{i} = (i_0, i_1, i_2, \cdots i_k)$ の全体とする:

(1) $0 = i_0 < i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq m \ (= l(w))$

(2) $s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_k} = 1$ (但し $s_{i_0} = 1$ としておく。)

(3) $l(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_h}) < l(s_{i_0} s_{i_1} \cdots s_{i_h} s_r)$

$(i_h + 1 \leq r \leq i_{h+1} - 1 \quad h = 0, 1, 2, \cdots, k)$.

<u>Definition</u>

$I_w \ni \underline{i} = (i_0, i_1, \cdots, i_k)$ の時, k を $\underline{i}$ の長さ $l(\underline{i})$ と呼ぶ.

polynomial $F_w(q)$ を次式により定義する:

$$F_w(t) = \sum_{\underline{i} \in I_w} t^{l(\underline{i})/2} (t-1)^{l(w) - l(\underline{i})}$$

<u>Lemma</u> w_0 を $\overline{W}$ の長さ最大の元とし, U を B の unipotent radical とすると, $F_w(q) = |w_0 U_k w_0 \cap B_k w B_k|$.

<u>Corollary</u> $\sum_{w\in W} F_w(q) = q^N$, 但し N は G の positive roots の個数.

<u>Theorem 8.</u> $B_k wB_k$ 内の unipotent elements の個数は $q^N F_w(q)$.

(上の Cor. とあわせて, G_k 内の unipotent elements の個数が q^{2N} であることがわかる.)

この結果を character theory との関連から見直すことにする. $\{\Phi\}$ を $\chi_1 = \underset{B_k \uparrow G_k}{\mathrm{ind}}\, 1$ の irreducible constituents とする. 一般論から (Theorem 3), $\{\Phi\}$ と W の irreducible representations $\{\varphi\}$ とは一対一に対応している. 今 $\Phi \leftrightarrow \varphi$ とし $W \ni w \to (-1)^{l(w)}\varphi(w)$ なる W の irred. repr. に対応する χ_1 の irred. constituent を $\hat{\Phi}$ と書く. 明らかに $(\hat{\Phi})^\wedge = \Phi$. Theorem 7, 8 は次のように言いかえることができる.

<u>Theorem 9.</u> Φ を χ_1 の irred. consti., ψ をその character, $\hat{\psi}$ を $\hat{\Phi}$ の character とすると,

$\sum_u \psi(u) = q^N \hat{\psi}(1)$, ここに和は G_k の unipotent elements 全体にわたる.

(とくに ψ が identity character なら $\hat{\psi}$ は Steinberg character 従って $\hat{\psi}(1) = q^N$. このとき上の Theorem は G_k の unipotent elements の個数が q^{2N} であることを意味している.)

文　献（完全なものではない）

[1] C. Chevalley : Sur certains groupes simples, Tôhoku Math. Jour., (2) vol. 7 (1955), P. 14-66.

[2] R. Steinberg : A geometric approach to the representations of the full linear group over a Galois field, Trans. Amer. Math. Soc. 71 (1951), P. 274-282.

[3] J. A. Green : The characters of the finite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc., Trans. Amer. Math. Soc. 80 (1955), P. 402-447.

[4] N. Iwahori : On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, J. Fac. of Sci. Univ. Tokyo 10 (1964), P. 215-236.

[5] C. W. Curtis, N. Iwahori and R. Kilmoyer, Hecke algebras and characters of parabolic type of finite groups with (B, N)-pairs, Publ. Math. I.H.E.S. 40 (1971), P. 81-116.

[6] R. Steinberg : Prime power representations of finite linear groups I., II, Canad. J. Math., 8 (1956), P. 580-591 and 9 (1957), P. 347-351.

[7] C. W. Curtis : The Steinberg character of a finite group with a (B, N)-pair, J. of alg. 4

(1966) P. 433–441.
[8] L. Solomon: The Steinberg character of a finite group with BN-pair, Proc. Sympos. Theory of finite groups (Harvard Univ., Cambridge, Mass., 1968) Benjamin, New York, (1969) P. 213–221.
[9] Harish-Chandra: Eisenstein series over finite fields in Functional analysis and related fields (Proc. of a conference in honor of Prof. M. Stone at Univ. of Chicago, 1968, ed. by F. E. Browder), Berlin, Springer, 1970)
[10] I. M. Gelfand and M. I. Graev: Construction of irreducible representations of simple algebraic groups over a finite field, D.A.H. 147-3 (1962) P. 529–532.
[11] R. Steinberg: Lectures on Chevalley groups, Yale University, 1967
[12] R. Steinberg: Endomorphisms of linear algebraic groups, Memoirs A.M.S. 80 (1968)
[13] B. Srinivasan: On the Steinberg character of a finite simple group of Lie type, J. of Aust. Math. Soc., 12, (1971), P. 1–14.
[14] T. A. Springer: Generalization of Green's polynomials in Proc. symp. in pure math. vol XXI, Amer. Math. Soc.